

Федеральное агентство по образованию

УДК 551.322, 536.421

ГРНТИ 30.17, 30.17.35, 30.51.31

Инв. №

ПРИНЯТО:	УТВЕРЖДЕНО:
Приемочная комиссия Государственного заказчика:	Государственный заказчик Федеральное агентство по образованию
От имени Приемочной комиссии _____/Попова Е.П. /	От имени Государственного заказчика _____/Бутко Е.Я./

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТЧЕТ

о выполнении 2 этапа Государственного контракта
№ П819 от 17 августа 2009 г.

Исполнитель: Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Уральский государственный университет им. А.М. Горького"

Программа (мероприятие): Федеральная целевая программ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., в рамках реализации мероприятия № 1.3.2 Проведение научных исследований целевыми аспирантами.

Проект: Нелинейная динамика структурных и фазовых превращений в гидромеханических и тепломассообменных процессах кристаллизации вещества
Проректор по инновационной деятельности: Кружаев Владимир Венедиктович
М.П.

Руководитель проекта: Низовцева Ирина Геннадьевна

Согласовано:

Управление научных исследований и
инновационных программ
От имени Заказчика

_____/Кошкин В.И./

Екатеринбург
2010 г.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ
по Государственному контракту П819 от 17 августа 2009 на выполнение поисковых
научно-исследовательских работ для государственных нужд

Организация-Исполнитель: Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Уральский государственный университет им. А.М. Горького"

Руководитель темы:

кандидат физико-
математических наук, без
ученого звания

_____ Низовцева И. Г.
подпись, дата

Исполнители темы:

без ученой степени, без
ученого звания

_____ Рахматуллина И. В.
подпись, дата

без ученой степени, без
ученого звания

_____ Корольков Е.А.
подпись, дата

Реферат

Количество страниц отчета: 53

Количество частей отчета: 5

Количество иллюстраций: 6

Количество таблиц: 0

Количество используемых источников: 25

Количество приложений: 0

Ключевые слова: гидромеханика , тепломассоперенос , фазовые переходы , двухфазная зона , кристаллизация , турбулентность , подвижные границы , структурообразование.

В отчете представлены результаты исследований, выполненных по 2 этапу Государственного контракта № П819 "Нелинейная динамика структурных и фазовых превращений в гидромеханических и тепломассообменных процессах кристаллизации вещества" (шифр "НК-253П") от 17 августа 2009 по направлению "Механика" в рамках мероприятия 1.3.2 "Проведение научных исследований целевыми аспирантами.", мероприятия 1.3 "Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук и целевыми аспирантами в научно-образовательных центрах" , направления 1 "Стимулирование закрепления молодежи в сфере науки, образования и высоких технологий." федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры

инновационной России" на 2009-2013 годы.

Цель работы: Аналитическое описание нестационарной нелинейной динамики структурных и фазовых превращений в гидромеханических и тепломассообменных процессах кристаллизации вещества».

Методы, использованные при выполнении отдельных видов работ: методы теоретического моделирования тепломассообменных процессов и задач с движущимися границами фазовых переходов теорий тепломассопереноса, турбулентности, двухфазной зоны, устойчивости и методы решения подобных задач, развитые в предшествующие годы в НОЦ «Физико-химическая механика».

Инструментарий, использованный при выполнении отдельных видов работ (для выполнения отдельных «Действий» в соответствии с «Детализированным Предложением о качестве поисковых научно-исследовательских работ»):

1. Научная библиотека УрГУ. Электронные научные библиотеки. Поисковые ресурсы Интернета. Компьютеры, оснащенные выходом в Интернет (сеть УрГУ), с лицензионным программным обеспечением.
2. Компьютеры уровня не ниже Intel Pentium IV. Лицензионное программное обеспечение.
3. Теории тепломассопереноса, турбулентности, двухфазной зоны, устойчивости и методы решения подобных задач, развитые в предшествующие годы в НОЦ «Физико-химическая механика».
4. ГОСТ 7.32-2001 «Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления».

В соответствии с конкурсной документацией, Государственным контрактом

№ П819 от 17 августа 2009, календарным планом проведения исследований проведены следующие виды работ по второму этапу (выполнена следующая последовательность действий):

1. Выполнены теоретические исследования II этапа: разработана математическая модель, описывающая динамику образования структуры типа «ложное дно» для жидкостей переменных температур с учетом флуктуаций скоростей трения; поиск и представление теоретического решения разработанной модели.
2. Проведена подготовка публикации результатов исследований для рекомендованного ВАК издания («Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки», статья «Нестационарная кристаллизация воды с двухфазной зоны при турбулентных и нетурбулентных условиях», 2010, №1 (20), С.133-142) по исследованию проблем структурных превращений веществ с учетом сложных гидродинамических эффектов.
3. Проведено обобщение и выполнена оценка результатов исследований в сравнении с современным научно-техническим уровнем.

А именно, в результате проведения теоретических исследований II этапа, разработана математическая модель и методы ее решения для процессов замерзания воды в трещинах океанических льдов, описывающей динамику образования структуры типа «ложное дно» для жидкостей переменных температур с учетом флуктуаций скоростей трения. Математическая модель разработана на основе следующих работ по данной проблеме: Д.В. Александров, А.П. Малыгин // Доклады АН, 2006, Т. 411, N 3, С. 390-394; Д.В. Александров, И.Г. Низовцева, Доклады АН // 2008, Т. 419, N 2, С. 262-265; D.V. Alexandrov, A.P. Malygin, I.V. Alexandrova // Annals of Glaciology, 2006, V. 44, P. 118-122, D.V. Alexandrov, I.G. Nizovtseva, A.P. Malygin, H.-N. Huang, D. Lee,

Unidirectional solidification of binary melts from a cooled boundary: analytical solutions of a nonlinear diffusion-limited problem, «IOP Publishing», Journal of Physics: Condensed Matter, 2008, Vol. 20, P. 114105. Определены распределения температуры и солености, доли твердой фазы в области фазового перехода, исследована динамика положений границ фазового перехода лед – двухфазная зона, двухфазная зона – соленая вода, двухфазная зона – пресная вода. Полученные характеристики процесса позволили рассчитать поправки к тепловому потоку, исходящему с поверхности льда в атмосферу, которые вызваны замерзанием воды в трещинах льда, эволюцией «ложного дна» и турбулентными течениями жидкости в океане.

Данное исследование позволит изучить влияние явления «ложного дна» и флуктуаций скорости трения вблизи границы лед-океан на гидромеханические и тепломассообменные процессы кристаллизации вещества. Ожидаемые результаты исследований имеют хорошие перспективы коммерциализации и высокую общесоциальную, экономическую значимость ввиду того, что рассматриваемые задачи затрагивают целый ряд социально-значимых проблем управления климатом, геофизическими явлениями в приложении к металлургии и связаны с задачами получения наилучшего описания управляющих параметров систем, претерпевающих структурные и фазовые превращения, нахождения максимально эффективных путей получения веществ с заданными свойствами.

В рамках теоретического исследования второго этапа разработана математическая модель и методы ее решения для процессов замерзания воды в трещинах океанических льдов, описывающей динамику образования структуры типа «ложное дно» для жидкостей переменных температур с учетом флуктуаций скоростей трения.

Математическая модель разработана на основе следующих работ по данной проблеме: Д.В. Александров, А.П. Малыгин // Доклады АН, 2006, Т. 411, N 3, С. 390-394; Д.В. Александров, И.Г. Низовцева, Доклады АН // 2008, Т. 419, N 2, С. 262-265; D.V. Alexandrov, A.P. Malygin, I.V. Alexandrova // Annals of Glaciology, 2006, V. 44, P. 118-122, D.V. Alexandrov, I.G. Nizovtseva, A.P. Malygin, H.-N. Huang, D. Lee, Unidirectional solidification of binary melts from a cooled boundary: analytical solutions of a nonlinear diffusion-limited problem, «IOP Publishing», Journal of Physics: Condensed Matter, 2008, Vol. 20, P. 114105. Определены распределения температуры и солености, доли твердой фазы в области фазового перехода, исследована динамика положений границ фазового перехода лед – двухфазная зона, двухфазная зона – соленая вода, двухфазная зона – пресная вода. Полученные характеристики процесса позволили рассчитать поправки к тепловому потоку, исходящему с поверхности льда в атмосферу, которые вызваны замерзанием воды в трещинах льда, эволюцией «ложного дна» и турбулентными течениями жидкости в океане.

Данное исследование позволило изучить влияние явления «ложного дна» и флуктуаций скорости трения вблизи границы лед-океан на гидромеханические и тепломассообменные процессы кристаллизации вещества. Следует отметить, что полученные результаты исследований имеют хорошие перспективы коммерциализации и высокую общесоциальную, экономическую значимость ввиду того, что рассмотренные задачи затрагивают целый ряд социально-значимых проблем управления климатом, геофизическими явлениями в приложении к металлургии и связаны с задачами получения наилучшего описания управляющих параметров систем, претерпевающих структурные и фазовые превращения, нахождения максимально эффективных путей получения веществ с заданными свойствами.

Научные материалы, изложенные в отчете представляют собой единую теорию исследования нелинейных процессов направленной кристаллизации,

протекающих при наличии зоны двухфазного состояния вещества в нестационарных условиях. Основные результаты и научные выводы работы заключаются в следующем: Работа посвящена исследованию процессов замерзания воды в трещинах океанических льдов, описывающей динамику образования структуры типа «ложное дно» для изотермического океана.

. Сформулирована нелинейная математическая модель процесса тепло- и массопереноса, учитывающая наличие трех движущихся границ фазового перехода. Аналитически получены точные решения нелинейной модели с учетом временных зависимостей температуры и солености воды на глубине и флуктуаций скорости трения; найдены распределения температуры и солености воды, доля твердой фазы, законы движения границ фазового перехода «морская вода - двухфазная зона», «двухфазная зона - талая вода» и «талая вода - лед». Показано, что структурные переходы в толще льда связаны с процессами эволюции ложного дна.

Рассмотрена фронтальная модель; модель двухфазной зоны, существенно отличающаяся от фронтальной модели и известных ранее подходов, которая адекватно описывает физическую картину процесса и хорошо согласуется с наблюдениями. В рамках развиваемой модели, впервые получено аналитическое решение нелинейной нестационарной проблемы кристаллизации морской воды при произвольных изменениях со временем температуры атмосферы на поверхности льда. Определен явный вид законов движения границ фазового перехода и протяженность двухфазной зоны.

Результаты выполнения НИР использованы и будут использованы:

1. Для получения новых выводов и дальнейшего развития знаний о динамике фазовых переходов при замерзании льда.
2. Для обновления лекционных курсов, читаемых студентам, таких как

«Аналитические методы механики сплошных сред», «Тепломассоперенос», «Физика», написания пособий и учебно-научных монографий.

3. Для повышения квалификации молодых кадров в области геофизики, защиты кандидатских диссертаций членами группы, выполнения квалификационных работ членами группы - студентами.

СОДЕРЖАНИЕ

«Проведение 2 этапа исследований по проблеме:

Нелинейная динамика структурных и фазовых превращений в гидромеханических и
тепломассообменных процессах кристаллизации вещества.»

Введение	11
1. Аннотированная справка по научным результатам НИР, полученным на I этапе	12
1.1 Фронтальная модель роста ложного дна	12
1.2 Модель роста ложного дна с двухфазной зоной	15
1.3 Выводы	21
2. Аналитический отчет о проведении теоретических исследований	22
2.1 Нетурбулентная модель кристаллизации в условиях неизотермического океана	22
2.2 Турбулентная модель кристаллизации в условиях неизотермического океана	30
2.3 Выводы	35
3 Отчет по обобщению и оценке результатов исследований	36
4 Публикация результатов НИР	38
4.1 Заключение экспертной комиссии по открытому опубликованию	38
4.2 Копия статьи, опубликованной в журнале ВАК	39
Заключение	49
Список использованных источников	51

Введение

На первый взгляд кажущаяся тривиальной проблема роста твердой фазы от охлаждаемой границы берет свое начало от так называемой задачи Стефана, описывающей широкий круг физических процессов [1]. Их сложное нелинейное поведение и необходимость расчета различных характеристик этих процессов, встречающихся как в геофизике, так и в металлургии, является стимулом для разработки новых математических подходов к решению. Как уже отмечалось, процессы затвердевания бинарных растворов и расплавов часто протекают в условиях присутствия зон переохлаждения, т. е. зон в жидкой фазе системы с температурой ниже температуры фазового перехода, которая может зависеть от солености воды (концентрации растворенной примеси). Будем рассматривать ситуацию, когда концентрационное переохлаждение в двухфазной зоне снимается за счет активно растущих элементов твердой фазы [2, 3] и произведем учет течений турбулизированной жидкости вблизи растущей границы двухфазная зона - вода. Такой учет приведет к изменению пограничных условий баланса тепла и массы на этой границе. Будем основываться на предположении о линейных температурных распределениях в твердой фазе и двухфазной зоне (это предположение часто реализуется в естественных условиях при замерзании трещин [4, 5] и образовании ложного дна [6]), следующее из того обстоятельства, что время релаксации температурного поля намного меньше характерного времени движения границы двухфазная зона - жидкая фаза. Также будем считать, что граница твердая фаза - двухфазная зона сильно отстает от границы двухфазная зона – жидкая фаза вследствие того, что растворенная соль вытесняется растущей твердой фазой в области, где ее концентрация становится очень высокой. Присутствие таких областей в двухфазной зоне сильно тормозит движение границы твердая фаза - двухфазная зона.

1. Аннотированная справка по научным результатам НИР, полученным на I этапе.

1.1. Фронтальная модель роста ложного дна.

Для демонстрации основных черт процесса рассмотрим простейшую стефановскую модель без учета двухфазной зоны и возможного турбулентного перемешивания в соленой воде [7]. На рис. 1 приведена принципиальная схема такого процесса. На границе $z=h(t)$ между ложным дном и соленой водой выполняются граничные условия баланса тепла и массы

$$\rho L \frac{dh}{dt} = k_i \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ice} - k_w \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{water}, \quad (S_0 - S_i) \frac{dh}{dt} = -D \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)_{water}, \quad (1)$$

где ρ - плотность льда, L - скрытая теплота его плавления, k - коэффициент теплопроводности (индексы i и w соответственно относятся ко льду и соленой воде), T - температура, z - вертикальная пространственная координата, S_0 - соленость океана на границе ложного дна, S_i - объемная соленость льда, D - коэффициент диффузии соли в морской воде.

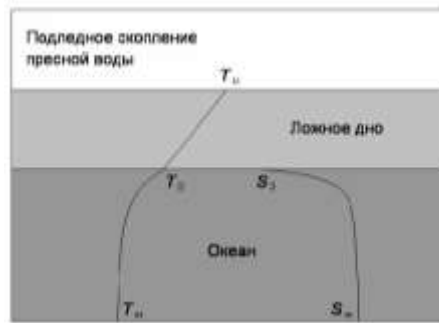


Рис. 1. Схема фронтального процесса миграции ложного дна и вид распределений температуры и солености.

Температура T_0 на поверхности льда при $z=h(t)$ связана с концентрацией S_0 с помощью условия ликвидус

$$T_0 = -mS_0, \quad (2)$$

где $m=0.054^\circ C/^\circ/\text{‰}$. Во льду и в соленой воде выполняются уравнения теплопроводности и диффузии

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}, \quad (3)$$

где $\kappa = k/(\rho c_p)$ - коэффициент температуропроводности, а c_p - теплоемкость. Вслед за авторами работы [7] для простоты анализа будем пренебрегать диффузионными потоками во льду и тепловыми потоками в пресной воде. Также, основываясь на данных эксперимента Мартина-Кауффмана, будем рассматривать линейный температурный профиль во льду. В этом случае стефановское условие на верхней границе ложного дна при $z = h_u(t)$ примет вид:

$$\rho L \frac{dh_u}{dt} = k_i \frac{T_u - T_0}{h_u - h}, \quad (4)$$

где T_u - температура верхней части ложного дна.

Сформулированная задача (1)-(4) имеет автомодельное решение с масштабной переменной $\eta = z/(2\sqrt{Dt})$. Запишем это решение в следующем виде:

$$h(t) = 2\lambda\sqrt{Dt}, \quad h_u(t) = 2\lambda_u\sqrt{Dt}, \quad (5)$$

$$T(\eta) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\text{erfc}(-\varepsilon\eta)}{\text{erfc}(-\varepsilon\lambda)}, \quad \eta < \lambda, \quad (6)$$

$$T(\eta) = T_0 + (T_u - T_0) \frac{\eta - \lambda}{\lambda_u - \lambda}, \quad \lambda < \eta < \lambda_u, \quad (7)$$

$$S(\eta) = S_\infty + (S_0 - S_\infty) \frac{\text{erfc}(-\eta)}{\text{erfc}(-\lambda)}, \quad \eta < \lambda, \quad (8)$$

где $\varepsilon = \sqrt{D/\kappa_w}$. Из выражения (5) следует, что dh/dt и dh_u/dt пропорциональны $\sqrt{D/t}$ с константами пропорциональности λ и λ_u , большие значения которых соответствуют более высоким скоростям движения границ. Распределения (6) и

(8) описывают температурное и концентрационное поле в соленой воде, а соотношение (7) определяет линейный температурный профиль в толще ложного дна. Коэффициенты λ , λ_u и T_0 определяются из граничных условий (1) и (4), а значение S_0 по формуле (2). Подставляя теперь выражения (5)-(8) в пограничные условия (1), (4), получим три уравнения для нахождения λ , λ_u и T_0

$$(S_0 - S_i) = \frac{S_0 - S_\infty}{F(-\lambda)}, F(x) = \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x), \quad (9)$$

$$\frac{L}{c_{pw}} = \frac{1}{2} \frac{k_i}{k_w} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{T_u - T_0}{\lambda(\lambda_u - \lambda)} - \frac{T_\infty - T_0}{F(-\varepsilon\lambda)}, \quad (10)$$

$$\frac{L}{c_{pw}} = \frac{1}{2} \frac{k_i}{k_w} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{T_u - T_0}{\lambda_u(\lambda_u - \lambda)}, \quad (11)$$

где c_{pw} - теплоемкость воды.

Решения уравнений (9)-(11) по данным работы [7] приведено на рис. 2 (расчет производился при нулевом значении S_i). Из рисунков видно, что λ и λ_u порядка единицы и слабо изменяются при варьировании значений температуры и солёности на бесконечности. Поскольку λ_u всегда превосходит λ , протяженность ложного дна растет со временем.

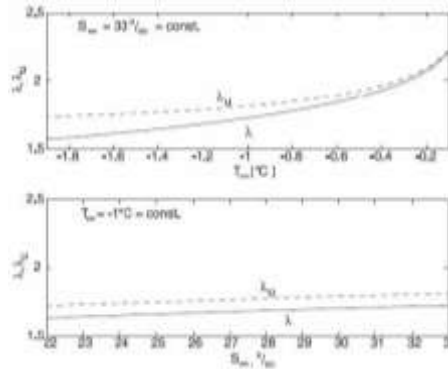


Рис. 2. Зависимости констант роста λ и λ_u от температуры и солёности на бесконечности при $L = 333.5$ кДж/кг, $c_{pw} = 4.185$ кДж/(кг · °C), $\kappa_w = 1.39 \cdot 10^{-7}$ м²/с,

$$\kappa_i = 1.15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, D = 6.8 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Полученные решения на основе рассмотренной в этом разделе фронтальной модели стефановского типа демонстрируют лишь общие свойства рассматриваемого процесса. Поскольку в реальных условиях процесс миграции ложного дна протекает при наличии протяженной области фазового перехода, а не четко выраженной фронтальной границы, а также в условиях турбулентного переноса тепла и массы в океане вблизи границы с ложным дном (см., например, [8-10]), становится ясным, что необходимо учитывать указанные процессы в математической постановке задачи. Частичная попытка произвести такой учет была произведена в работе [7], где авторы записали граничные условия для турбулентного транспорта тепла и массы на границе между ложным дном и океаном. Однако двухфазная зона в их модели не учитывалась. Другими словами, задача ставилась во фронтальном приближении. При этом, ее решения строились только численно, что усложняет анализ получаемых результатов. В следующем разделе будут устранены оба из отмеченных недостатков. Отметим, что будет произведен учет движения ложного дна с зоной двухфазного состояния вещества при наличии турбулентного перемешивания в соленой воде в приграничной с ложным дном области, а также будут построены аналитические решения сформулированной задачи с движущимися границами.

1.2 Модель роста ложного дна с двухфазной зоной.

Рассмотрим процесс направленного затвердевания ложного дна с двухфазной зоной, изображенный на рис. 3. Рассмотрим систему, когда в ней уже образовалась тонкая корочка ложного дна (как уже отмечалось, в природе этот процесс может занимать несколько часов). Области $a(t) < z < 0$, $z < b(t)$ и $b(t) < z < a(t)$ соответственно заполнены пресной водой, морской водой и ложным дном, представляющим собой двухфазный слой (здесь $a(t)$ и $b(t)$ -

движущиеся границы пресная вода - двухфазная зона и двухфазная зона - морская вода соответственно). Будем рассматривать двухфазную зону как квазиравновесную [11, 12]. Поскольку время релаксации температурного поля намного меньше всех остальных характерных времен процесса, будем описывать температурное поле в двухфазной зоне линейной функцией пространственной координаты

$$T_m(z, t) = \frac{T_a(t)(z - b(t)) + T_b(t)(a(t) - z)}{a(t) - b(t)}, \quad b(t) < z < a(t), \quad (12)$$

где T_a и T_b - температуры на границах a и b . Линейный вид температурного распределения (12) также подтверждается лабораторными экспериментами [6]. Это означает, что температурное поле и доля твердой фазы $\varphi(z, t)$ в двухфазной зоне претерпевают лишь незначительные изменения со временем (φ также с пространственной координатой z). Теоретически этот вывод был продемонстрирован в работах [13, 14] при изучении затвердевания молодого льда в трещинах многолетних льдов.

Учитывая, что распределение солёности в двухфазной зоне $S_m(z, t)$ также является практически линейной функцией z [6] и слабые временные и пространственные изменения доли твердой фазы в двухфазной зоне, будем использовать уравнение Шейла [15]

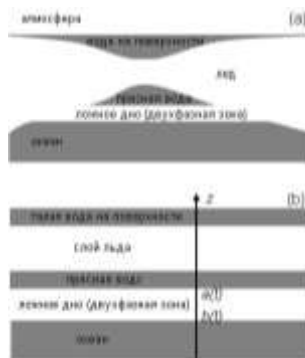


Рис. 3. Эскиз (a) и принципиальная диаграмма (b) процесса.

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \varphi) S_m = 0, b(t) < z < a(t). \quad (13)$$

Уравнение (13) подразумевает, что вся соль вытесняется льдом в жидкую часть двухфазной зоны. Вследствие того, что двухфазная зона считается термодинамически равновесной, температура и соленость в ней связаны уравнением линии ликвидус

$$T_m(z, t) = -m S_m(z, t), b(t) < z < a(t), \quad (14)$$

где m - постоянный коэффициент наклона ликвидуса.

Лабораторные эксперименты [6] показывают, что потоки тепла и массы на границе $a(t)$ со стороны пресной воды много меньше своих аналогов со стороны двухфазной зоны (ложного дна). Это позволяет записать граничные условия баланса тепла и массы при $z = a(t)$ в следующем виде:

$$L_v \varphi_a \frac{da}{dt} = k_i \varphi_a + k_w (1 - \varphi_a) \frac{\partial T_m}{\partial z}, \quad (15)$$

$$S_a \frac{da}{dt} = -D \frac{\partial S_m}{\partial z}, \quad (16)$$

где $L_v = \rho L$ - параметр скрытой теплоты. Условие (16) означает, что скорость диффузионного отвода соли из двухфазной зоны в пресную воду совпадает со скоростью движения границы $a(t)$ (это предположение подтверждается лабораторными экспериментами [6], которые свидетельствуют практически о нулевой солености в слое пресной воды).

Поскольку скорость движения границы $z = b(t)$ определяется турбулентными течениями жидкости в соленой воде (океане), запишем пограничные условия при $z = b(t)$ в следующем виде [7, 8, 9]:

$$L_v \varphi_b \frac{db}{dt} = k_i \varphi_b + k_w (1 - \varphi_b) \left(\frac{\partial T_m}{\partial z} + \alpha_h \rho_w c_{pw} u (T_\infty - T_b) \right), \quad (17)$$

$$S_b \varphi_b \frac{db}{dt} = \alpha_s u (T_\infty - T_b), \quad (18)$$

где T_∞ и S_∞ обозначают температуру и соленость морской воды вдали от ложного дна, u - скорость трения, ρ_w и c_{pw} - плотность и теплоемкость воды, α_h и α_s - коэффициенты турбулентного переноса тепла и массы. Отношение этих коэффициентов определяется через отношение коэффициентов температуропроводности (κ) и диффузии (D): $\alpha_h/\alpha_s = (\kappa/D)^n$, где $2/3 < n < 4/5$ [16, 17].

Сформулированная модель (12)-(18) представляет собой нелинейную систему уравнений и граничных условий с движущимися границами фазовых превращений. Перейдем теперь к вопросу построения аналитических решений этой модели.

Интегрирование уравнения (13) дает распределение доли твердой фазы в двухфазной зоне

$$\varphi(z, t) = 1 - \frac{1 - \varphi_b \frac{T_b}{T_m(z, t)}}{T_m(z, t)}, \quad (19)$$

где $T_m(z, t)$ определяется выражением (12). Комбинируя граничные условия (15), (16) и принимая во внимание уравнение (14), находим долю твердой фазы на верхней границе

$$\varphi_a(t) = \frac{KT_a(t)}{(K-1)T_a(t) - T_p}, \quad K = \frac{k_w}{k_i}, \quad T_p = \frac{DL_v}{k_i}. \quad (20)$$

Подставляя теперь $\varphi_a(t)$ из (20) в (19) при $z = a(t)$, выражаем температуру T_b нижней границы через температуру $T_a(t)$ верхней границы

$$T_b(T_a(t)) = \frac{T_a^2(t) + T_a(t)T_p}{\varphi_b - 1 - (K-1)T_a(t) - T_p}, \quad (21)$$

Поскольку тепловой и концентрационный потоки пропорциональны в соответствии с выражениями (12) и (14), можно получить систему уравнений для определения протяженности ложного дна $h(t) = a(t) - b(t)$ и температуры $T_a(t)$. Для этого, приравняем производные db/dt из уравнений (17) и (18) и вычтем производные, стоящие в левых частях уравнений (15) и (18). В результате, получим

$$a(t) - b(t) = Q_1(T_a(t), t), \quad (22)$$

$$\frac{d(a(t) - b(t))}{dt} = \frac{Q_2(T_a(t))}{a - b} + Q_3(T_a(t), t), \quad (23)$$

где

$$Q_1(T_a(t), t) = -\frac{(k_i\varphi_b + k_w(1 - \varphi_b))(T_a - T_b)T_b}{\alpha_s u L_v (T_b + mS_\infty) + \alpha_h \rho_w c_{pw} u (T_\infty - T_b)T_b},$$

$$Q_2(T_a(t)) = \frac{(k_i\varphi_a + k_w(1 - \varphi_a))(T_a - T_b)}{L_v \varphi_a}, \quad Q_3(T_a(t), t) = \frac{\alpha_s u (T_b + mS_\infty)}{T_b \varphi_b}.$$

В этих выражениях аргументы функций Q_1 , Q_2 и Q_3 могут зависеть от времени в явном виде (не только с помощью зависимости $T_a(t)$), если u , T_∞ или S_∞ зависят от времени.

Рассмотрим сначала ситуацию постоянных значений параметров u , T_∞ или S_∞ (или когда эти параметры, зависящие от времени, заменены своими средними величинами). В этом случае Q_1 , Q_2 и Q_3 зависят от времени только через функцию $T_a(t)$. Подставляя $a(t) - b(t)$ из (22) в (23), находим явный вид функции $t(T_a)$

$$t(T_a) = \int_{T_{a0}}^{T_a} F(T_a) dT_a, \quad F(T_a) = \frac{dQ_1(T_a)}{dT_a} \frac{Q_1(T_a)}{Q_2(T_a) + Q_1(T_a)Q_3(T_a)}. \quad (24)$$

Начальная температура T_{a0} (определенная при $t = 0$) может быть легко найдена

из решения алгебраического уравнения (22) при условии, что начальные координаты $a(0)$ и $b(0)$ известны. Вычисление интеграла (24) определяет обратную функцию $T_a(t)$ и дает полное решение задачи.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда одна из величин u , T_∞ или S_∞ зависит от времени. В этом случае можно получить задачу Коши для определения функции $T_a(t)$. Снова подставляя $a(t) - b(t)$ из (22) в (23), получим

$$\frac{dT_a(t)}{dt} = f(T_a, t), \quad T_a(0) = T_{a0}, \quad (25)$$

где $f(T_a, t)$ является известной функцией. Начальное условие T_{a0} , как и ранее, определяется уравнением (22).

Определим теперь законы движения границ $a(t)$ и $b(t)$. Интегрируя выражение (18), находим временную зависимость нижней границы

$$b(t) = b(0) - \int_0^t \frac{\alpha_s u(T_b(T_a) + mS_\infty)}{T_b(T_a) \varphi_b} dt, \quad (26)$$

где $T_b(T_a)$ и $T_a(t)$ определяются соотношениями (21), (24) и (25). Закон движения верхней границы следует из выражения (22) и имеет вид:

$$a(t) = b(t) + Q_1(T_a(t), t). \quad (27)$$

Таким образом, найденные зависимости дают полное решение рассматриваемой задачи.

1.3. Выводы

В работе исследована нелинейная динамика процессов миграции ложного дна: развита и обоснована новая математическая модель процессов кристаллизации ложного дна на основе представлений о равновесной двухфазной зоне и граничных условий, учитывающих турбулентный перенос тепла и массы в придонном слое со стороны морской воды. Проведен аналитический обзор, охватывающий лабораторные исследования по тематике. Рассмотрена фронтальная модель процесса; модель роста ложного дна с двухфазной зоной, которая существенно отличается от фронтальной модели и известных ранее подходов, и при том адекватно описывает физическую картину процесса и известные полевые и лабораторные наблюдения.

2. Аналитический отчет о проведении теоретических исследований.

2.1 Нетурбулентная модель кристаллизации в условиях неизотермического океана

Будем рассматривать полуограниченную область $z > 0$, изначально заполненную жидкостью солености S_∞ и находящейся при температуре T_∞ . Считается, что на границе между водой и атмосферой $z = 0$ в начальный момент образовалась тонкая корочка льда, а сама граница поддерживается при температуре $T_0(t)$, которая является произвольной функцией времени t . Области $a(t) < z < b(t)$ и $z > b(t)$ заполнены двухфазной зоной и жидкой фазой. В соответствии с предположениями о линейности температуры в твердой фазе и двухфазной зоне, для распределения температуры имеем (также см. работы [4, 5, 6])

$$T_i(z, t) = T_0(t) + C_1(t)z, \quad 0 < z < a(t), \quad (28)$$

$$T_m(z, t) = T_1(t) + T_2(t)z, \quad a(t) < z < b(t), \quad (29)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ обозначают границы двухфазной зоны с твердой фазой и жидкостью соответственно. Линейный температурный профиль (29) в двухфазной зоне должен приблизительно удовлетворять уравнению теплопроводности (здесь L_v - скрытая теплота кристаллизации)

$$\rho_m(\varphi)c_{pm}(\varphi)\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_m(\varphi)\frac{\partial T_m}{\partial z}\right) + L_v\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad a(t) < z < b(t). \quad (30)$$

где коэффициент теплопроводности и произведение плотности на теплоемкость k_m и $\rho_m c_{pm}$ могут считаться линейно зависящими от доли твердой фазы φ (индексы m , i и w соответственно обозначают характеристики двухфазной зоны, льда и воды):

$$k_m(\varphi) = k_i\varphi + k_w(1-\varphi), \quad \rho_m(\varphi)c_{pm}(\varphi) = \rho_i c_{pi}\varphi + \rho_w c_{pw}(1-\varphi). \quad (31)$$

Справедливость соотношений (31) обсуждается в работах [18, 19, 20]).

Уравнение (30) будет аппроксимироваться линейным профилем (29), если временные и пространственные изменения доли твердой фазы φ незначительны (а это, выполняется в силу быстрой релаксации температурного профиля). Это свойство согласуется с полученными решениями, а также обсуждается в работах [13, 14, 21]).

Уравнение диффузии соли в двухфазной зоне и уравнение линии ликвидус имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \varphi) S_m = D_w \frac{\partial}{\partial z} \left((1 - \varphi) \frac{\partial S_m}{\partial z} \right), \quad (32)$$

$$T_m(z, t) = -m S_m(z, t), \quad (33)$$

где S_m - концентрация примеси (соленость раствора), D_w - коэффициент диффузии соли, m наклон линии ликвидус, определяемый из фазовой диаграммы.

Граничные условия, выполняемые на подвижных границах $a(t)$ и $b(t)$ записываются в следующем виде (см, например, [12, 22])

$$\varphi = \varphi_a, \quad T_i = T_m, \quad z = a(t), \quad (34)$$

$$L_v (1 - \varphi_a) \frac{da}{dt} = k_i \frac{\partial T_i}{\partial z} - k_m(\varphi_a) \frac{\partial T_m}{\partial z}, \quad z = a(t), \quad (35)$$

$$S_m (1 - \varphi_a) \frac{da}{dt} = -D_w (1 - \varphi_a) \frac{\partial S_m}{\partial z}, \quad z = a(t), \quad (36)$$

$$\varphi = \varphi_b, \quad T_m = T_b, \quad z = b(t), \quad (37)$$

$$L_v \varphi_b \frac{db}{dt} = k_m(\varphi_b) \frac{\partial T_m}{\partial z} - k_w \frac{\partial T_w}{\partial z}, \quad z = b(t), \quad (38)$$

$$S_b \varphi_b \frac{db}{dt} = D_w(1 - \varphi_b) \frac{\partial S_m}{\partial z} - D_w \frac{\partial S_w}{\partial z}, \quad z = b(t), \quad (39)$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial z} = -m \frac{\partial S_w}{\partial z}, \quad z = b(t). \quad (40)$$

Напомним, что условия (34) и (37) отражают непрерывность температуры, однако доля твердой фазы φ может и не быть непрерывной [22]. Граничные условия (35), (36) и (38), (39) представляют собой условия баланса тепла и массы на движущихся границах. Условие (40) показывает, что концентрационное переохлаждение скомпенсировано в граничной точке двухфазной зоны [22].

В области, занятой жидкостью, выполняются следующие уравнения теплопроводности и диффузии

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = a_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial S_w}{\partial t} = D_w \frac{\partial^2 S_w}{\partial z^2}, \quad z > b(t), \quad (41)$$

где $a_w = k_w / (\rho_w c_{pw})$.

Модель (28)-(41) полностью описывает динамику процесса затвердевания в нетурбулентных условиях, т. е. в случае, когда течение жидкости в океане не вносит существенных изменений в потоки тепла и массы на границе двухфазная зона - жидкая фаза (когда справедливы пограничные условия (38) и (39)).

Перейдем теперь к вопросу построения аналитических решений сформулированной модели. В случае слабых отклонений закона движения границы $b(t)$ от зависимости, пропорциональной корню из времени [5], решения уравнений (41) могут быть аппроксимированы следующими выражениями

$$T_w(z, t) = T_\infty + \frac{(T_b - T_\infty) \operatorname{erfc}(z/\sqrt{4a_w t})}{\operatorname{erfc}(b(t)/\sqrt{4a_w t})}, \quad (42)$$

$$S_w(z, t) = S_\infty + \frac{(S_b - S_\infty) \operatorname{erfc}(z/\sqrt{4D_w t})}{\operatorname{erfc}(b(t)/\sqrt{4D_w t})}, \quad (43)$$

где $S_b = -T_b/m$, а T_b на поверхности $b(t)$ находится подстановкой распределений (42) и (43) в условие (40) в зависимости от координаты b и времени t

$$T_b = \frac{T_\infty f_1 + m S_\infty f_2}{f_1 - f_2}, \quad (44)$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{D_w}{a_w}} \exp\left(-\frac{b^2(t)}{4a_w t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b(t)}{\sqrt{4D_w t}}\right), \quad f_2 = \exp\left(-\frac{b^2(t)}{4D_w t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b(t)}{\sqrt{4a_w t}}\right).$$

Для интегрирования уравнения диффузии (32) выразим $T_2(t) \partial \varphi / \partial z$ из уравнения (30) (чтобы сделать это, для простоты пренебрегаем левой частью уравнения (30) в силу того обстоятельства, что время релаксации поля температуры на несколько порядков меньше соответствующего времени для поля концентрации растворенной соли). Итак, из (29) и (30) имеем

$$T_2(t) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{L_v}{k_i - k_w} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Теперь подставляя распределение (29) и найденную зависимость в уравнение (32), интегрируем уравнение диффузии и записываем распределение доли твердой фазы в двухфазной зоне

$$\varphi(z, t) = \frac{T_m(z, t) - T_b + (T_b + T_c)\varphi_b}{T_m(z, t) + T_c}, \quad T_c = \frac{D_w L_V}{k_i - k_w}, \quad (45)$$

где $T_b(1 - \varphi_b) - T_c\varphi_b$ слабо зависит от времени t . Подставляя $z = a(t)$ в (45) находим долю твердой фазы на границе $a(t)$

$$\varphi_a = \frac{T_1 + aT_2 - T_b + (T_b + T_c)\varphi_b}{T_1 + aT_2 + T_c}. \quad (46)$$

Подстановка выражений (1), (2) и (6) в условия (34), (36) и (37) позволяет выразить коэффициенты $T_1(t)$, $T_2(t)$ и $C_1(t)$

$$T_1(t) = T_b(t) - b(t)T_2(t), \quad T_2(t) = -T_b(t) \frac{da}{dt} \left(D_w + (a(t) - b(t) \frac{da}{dt}) \right)^{-1}, \quad (47)$$

$$C_1(t) = \frac{(a(t) - b(t))T_2(t) + T_b(t) - T_0(t)}{a(t)}. \quad (48)$$

Теперь комбинируя выражения (35), (38), (39), (47) и (48) получаем три соотношения для нахождения положений границ $a(t)$, $b(t)$ и доли твердой фазы φ_b

$$L_V(1 - \varphi_a)a \frac{da}{dt} = k_i(T_b - T_0) + T_b \frac{da}{dt} \frac{(k_i\varphi_a + k_w(1 - \varphi_a))a - k_i(a - b)}{D_w + (a - b)da/dt}, \quad (49)$$

$$L_V\varphi_b \frac{db}{dt} = -\frac{k_i\varphi_b + k_w(1 - \varphi_b)}{D_w + (a - b)da/dt} T_b \frac{da}{dt} - k_w(T_b - T_\infty)F_1(b, t), \quad (50)$$

$$T_b\varphi_b \frac{db}{dt} = -\frac{D_w(1 - \varphi_b)}{D_w + (a - b)da/dt} T_b \frac{da}{dt} - D_w(T_b + mS_\infty)F_2(b, t), \quad (51)$$

где

$$F_1 = -\frac{2}{\sqrt{4\pi a_w t}} \frac{\exp[-b^2/(4a_w t)]}{\operatorname{erfc}[b/\sqrt{4a_w t}]}, \quad F_2 = -\frac{2}{\sqrt{4\pi D_w t}} \frac{\exp[-b^2/(4D_w t)]}{\operatorname{erfc}[b/\sqrt{4D_w t}]}.$$

Выражение (50) можно представить в виде:

$$\varphi_b = -k_w \frac{T_b da/dt + (T_b - T_\infty)F_1(D_w + (a-b)da/dt)}{L_v(D_w + (a-b)da/dt)db/dt + (k_i - k_w)T_b da/dt}. \quad (52)$$

Специально подчеркнем, что граничные условия (50) и (51) становятся идентичными при $\varphi_b = 0$. Эта ситуация соответствует спокойному установившемуся режиму затвердевания (см, например, лабораторные эксперименты [23]). В этой ситуации твердая фаза вблизи границы $b(t)$ растет в виде иголок (для автомодельного процесса затвердевания эта ситуация была разобрана в работе [24]). Другая ситуация ($\varphi_b \neq 0$) может наблюдаться в случае размывания жидкостью игольчатой формы кристаллов (например в случае турбулентного течения жидкости) [25]. Тем не менее, рассмотрим обе ситуации затвердевания при $\varphi_b = 0$ и $\varphi_b \neq 0$ в отсутствии турбулентности.

Рассмотрим сначала случай $\varphi_b = 0$. Из выражений (44), $f_1 F_2 = f_2 F_1$, (46) и (52), имеем

$$\varphi_a = \frac{T_b(b-a)da/dt}{(T_b + T_c)D_w + T_c(a-b)da/dt}, \quad (53)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{(T_\infty + mS_\infty)D_w f_1 F_2}{T_\infty f_1 + mS_\infty f_2 + (T_\infty + mS_\infty)(a-b)f_1 F_2}. \quad (54)$$

Далее, учитывая что $a \ll b$ (процесс слабо зависит от положения границы a), из

выражений (49) и (53) будем иметь

$$\frac{da}{dt} = \frac{(T_0 - T_b)D_w}{bT_0}. \quad (55)$$

Приравнивая теперь левые части выражений (52) и (53), получаем трансцендентное уравнение для границы $b(t)$

$$\frac{T_0 - T_b}{b(t)T_0} = -\frac{(T_\infty + mS_\infty)f_1F_2}{T_\infty f_1 + mS_\infty f_2 - (T_\infty + mS_\infty)bf_1F_2}. \quad (56)$$

Положение границы $a(t)$ находится интегрированием выражения (55). Здесь $T_0 = T_0(t)$, $T_b = T_b(t, b(t))$, $f_1 = f_1(t, b(t))$, $f_2 = f_2(t, b(t))$, $F_1 = F_1(t, b(t))$, $F_2 = F_2(t, b(t))$, $T_\infty = T_\infty(t)$ и $S_\infty = S_\infty(t)$.

Рассмотрим теперь случай $\varphi_b \neq 0$. Учитывая снова, что $a \ll b$ и пренебрегая a в (49), получаем (55). Далее, выражая φ_b из выражений (50) и (51) и приравнивая результат, получаем громоздкое дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее динамику границы $b(t)$. Опуская ряд математических преобразований, запишем его окончательный вид в форме задачи Коши

$$\frac{db}{dt} = \frac{D_w k_i [T_\infty f_1 + mS_\infty f_2 - T_0 (f_1 - f_2)]}{b(t) [D_w L_V (f_1 - f_2) - k_w (T_\infty f_1 + mS_\infty f_2)]}, \quad (57)$$

где $b(0)$ известный параметр, а аргументы функций, как и ранее, зависят от t и $b(t)$. Положение границы $a(t)$ находится интегрированием выражения (55). Граничное значение доли твердой фазы φ_a , после подстановки T_1 и T_2 из (47) в (46), может быть записано в виде:

$$\varphi_a(t) = \frac{T_b b(1 - \varphi_b) da/dt + (T_b + T_c) \varphi_b D_w - T_c \varphi_b b da/dt}{(T_b + T_c) D_w - T_c b da/dt}, \quad (58)$$

где учтено, что $a(t) \ll b(t)$.

Рис. 4 показывает сравнение развиваемой теории с данными лабораторных экспериментов при $\varphi_b = 0$. Для сравнения выбран именно этот случай, поскольку в экспериментах наблюдалась игольчатая форма роста твердой фазы.

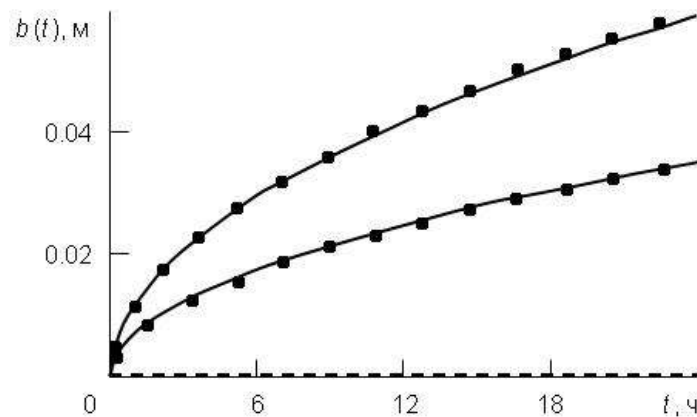


Рисунок 4. Зависимость $b(t)$ в соответствии с развиваемой теорией (сплошные линии, выражение (57)) и экспериментальные данные (черные кружки) в соответствии с работами [22, 23] по кристаллизации системы. Пунктирная линия показывает расчетное положение границы $a(t) \ll b(t)$

Следующий раздел посвящен развитию теории, более приближенной к естественным условиям, где основное внимание уделяется наличию турбулентного переноса тепла и массы.

2.2 Турбулентная модель кристаллизации в условиях неизотермического океана

В этой ситуации процесс кристаллизации сильно зависит от турбулентного течения жидкости в океане (см., например, [7, 8, 9]). С математической точки зрения эта ситуация соответствует новым пограничным условиям на границе двухфазная зона - океан. Заменяя тепловой и диффузионный потоки в условиях (38) и (39) турбулентными потоками в соответствии с работой [9], получим

$$L_v \phi_b \frac{db}{dt} = k_m(\phi_b) \frac{\partial T_m}{\partial z} - \alpha_h \rho_w c_{pw} u (T_\infty - T_b), \quad z = b(t), \quad (59)$$

$$S_b \phi_b \frac{db}{dt} = D_w (1 - \phi_b) \frac{\partial S_m}{\partial z} - \alpha_s u (S_\infty - S_b), \quad z = b(t), \quad (60)$$

где α_h и α_s - коэффициенты турбулентного переноса тепла и массы, u - скорость трения.

Отношение коэффициентов α_h/α_s зависит от коэффициентов теплопроводности (a_w) и диффузии (D_w) в воде. По данным работы [8], имеем $\alpha_h/\alpha_s = a_w/D_w^{2/3}$, где $2/3 < n < 4/5$ [16, 17]. Остальные уравнения и граничные условия модели (выражения (1)-(10)) остаются без изменений, кроме условия (40). В случае турбулентного течения жидкости это условие, вообще говоря, становится неприменимым, т.к. отсутствует физическая причина пропорциональности между градиентами тепла и массы.

Таким образом, в рассматриваемом случае имеем следующую модель: (28)-(37), (59) и (60).

Выше уже упоминалась принципиальная возможность реализации двух ситуаций кристаллизации с $\phi_b = 0$ и $\phi_b \neq 0$. Хотя второй случай в данных

условиях представляется более реалистическим и часто встречающимся в геофизике, проанализируем обе ситуации.

Рассматривая ситуацию $\varphi_b = 0$ и считая, что $a(t) \ll b(t)$, после подстановки da/dt из (55) в (59), находим положение границы двухфазная зона - океан

$$b(t) = \frac{k_w(T_0(t) - T_b(t))}{\alpha_h \rho_w c_{pw} u(t)(T_b(t) - T_\infty(t))}, \quad (61)$$

где $T_b(t)$ определяется подстановкой $\partial T_m / \partial z = -m \partial S_m / \partial z$ из (59) в (60). В результате получим

$$T_b(t) = -m S_b(t) = -\frac{m S_\infty(t) + P T_\infty(t)}{1 - P}, \quad P = \frac{\alpha_h D_w}{\alpha_s a_w}. \quad (62)$$

Положение границы двухфазная зона – твердая фаза находится интегрированием выражения (28)

$$a(t) = a(0) + \int_0^t \frac{(T_0(t) - T_b(t)) D_w}{b(t) T_0(t)} dt. \quad (63)$$

Рассмотрим теперь вторую ситуацию $\varphi_b \neq 0$, описывающую размывание жидкостью игольчатой формы растущих кристаллов. Учитывая соотношение (55), справедливое как для турбулентных, так и для нетурбулентных условий, и учитывая, что $a(t) \ll b(t)$, из граничных условий (59) и (60) получим два выражения для доли твердой фазы $\varphi_b(t)$

$$\varphi_b = -\frac{k_w(T_b - T_0) - \alpha_h \rho_w c_{pw} u(T_\infty - T_b)b}{(k_i - k_w)(T_b - T_0) - L_v b db/dt}, \quad (64)$$

$$\varphi_b = \frac{\alpha_s u(m S_\infty + T_b)b + D_w(T_b - T_0)}{D_w(T_b - T_0) + b T_b db/dt}. \quad (65)$$

Приравнивая теперь правые части (64) и (65), приходим к задаче Коши для определения $b(t)$

$$\frac{db}{dt} = \frac{(T_b - T_0)[bf_3 + k_i D_w (T_b - T_0)]}{b[bf_4 + (T_b - T_0)(D_w L_v - T_b k_w)]}, \quad (66)$$

где

$$f_3(t) = u(t)[\alpha_s(mS_\infty(t) + T_b(t))(k_i - k_w) - \alpha_h \rho_w c_{pw}(T_\infty(t) - T_b(t))D_w],$$

$$f_4(t) = u(t)[\alpha_s L_v (mS_\infty(t) + T_b(t)) + T_b(t)\alpha_h \rho_w c_{pw}(T_\infty(t) - T_b(t))],$$

а $b(0)$ является заданной величиной. Положение второй границы $a(t)$, доли твердой фазы φ_a и φ_b определяются выражениями (55), (58) и (64), а T_b представляет собой заданную температуру, в отличие от нетурбулентного сценария кристаллизации, где она определялась выражением (40). Таким образом, в турбулентном случае граничных условий получается на одно меньше, чем в нетурбулентном случае. С физической точки зрения температура T_b должна полностью определяться турбулентным течением жидкости вблизи границы $b(t)$, которое, в свою очередь, зависит от многих факторов (например от географических координат места расположения трещины и погодных условий).

Полагая скорость трения u в выражении (66) нулевой и интегрируя результат, получим приближенное выражение для $b(t)$ для случая очень медленного течения воды

$$b(t) = \sqrt{2k_i D_w \int_0^t \frac{(T_b - T_0)dt}{D_w L_v - T_b k_w}} + b^2(0).$$

Полученный интеграл очень похож на свой аналог для случая изотермического океана [13, 14].

Для сравнения развиваемой теории с экспериментом, снова обратимся к кристаллизации молодого льда. Рассмотрим образование такого льда по данным полевых наблюдений [4] (см. также [5]).

Рис. 5 и 6 демонстрируют распределение температуры в области кристаллизации на различных глубинах и координаты межфазных границ в зависимости от времени в соответствии с развиваемой в настоящем разделе теорией и данными наблюдений [4, 5]. Рис. 5 показывает колеблющиеся со временем законы движения границ вследствие течения жидкости в океане. Отметим, что граница $a(t)$ сильно отстает от границы $b(t)$, как это и предполагалось при построении теории. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

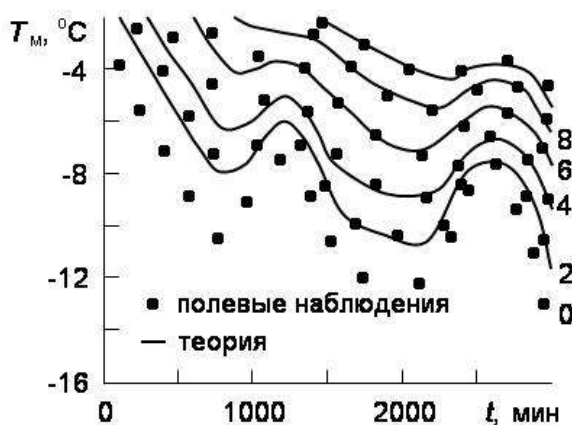


Рисунок 5. Температурные профили на различных глубинах в зависимости от времени в соответствии с данными полевых наблюдений [4, 5] и развиваемой теорией. Числа у кривых обозначают глубины (в сантиметрах), отмеренные от границы атмосфера - лед. Кривая при 0 см представляет собой атмосферную температуру на поверхности льда. При расчетах использовались следующие значения параметров [7]: $T_b = -1.97^\circ\text{C}$, $m = 0.052^\circ\text{C}/^\circ\text{C}_\infty$, $L_v = 3072 \cdot 10^5 \text{ Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-3}$, $k_i = 2.03 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, $k_w = 0.56 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, $D_w = 1.2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $\rho_w = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$

$$c_{pw} = 4187 \text{ Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}, T_\infty = -1.7 ^\circ\text{C}, S_\infty = 34.5 /_{\text{‰}}, \alpha_s u = 0.18 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\alpha_h / \alpha_s = 18.75.$$

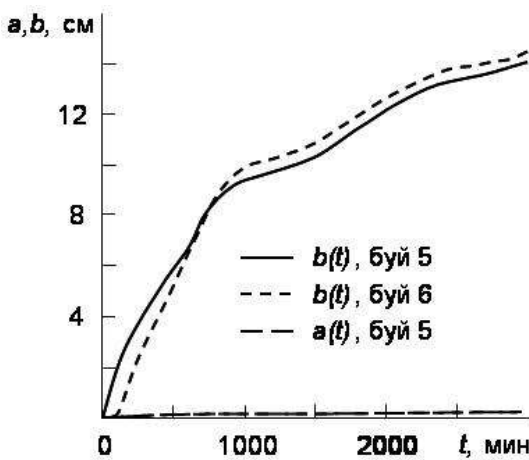


Рисунок 6. Временные зависимости положений границ $a(t)$ и $b(t)$ для экспериментов LeadEx [4, 5] (буи 5 и 6), полученные на основе развиваемой теорией

В заключение раздела отметим, что в настоящей работе определены аналитические решения затвердевания бинарного раствора с двухфазной зоной в условиях турбулентного движения жидкости в океане. В ситуации, когда $\varphi_b = 0$ определен явный вид законов движения границ двухфазной зоны. В ситуации, когда $\varphi_b \neq 0$, указанные законы найдены в явном виде при постоянных внешних параметрах системы. В случае, когда эти параметры изменяются со временем, в явном виде определен закон движения границы $a(t)$, а для нахождения границы $b(t)$ выписана задача Коши.

2.3 Выводы

В работе развита математическая модель процессов затвердевания от охлаждаемой по произвольному закону границы в присутствии двухфазной зоны для неизотермического раствора (морской воды) в отсутствие и при наличии турбулизации жидкости на границе между двухфазной зоной и жидкой фазой системы. Определены распределения температуры, концентрации примеси и доли твердой фазы во всех регионах протекания процесса, найден закон движения границы твердая фаза - двухфазная зона. Рассмотрены два сценария процесса: с нулевой (который описывает затвердевание с кристаллами игольчатой формы) и отличной от нуля (который описывает затвердевание с кристаллами с затупленной формой концов) долями твердой фазы на границе двухфазная зона - жидкость. Результаты развитой теории находятся в хорошем соответствии с данными наблюдений.

3. Отчет по обобщению и оценке результатов исследований.

Настоящее исследование посвящено аналитическому решению нестационарных задач направленной кристаллизации с подвижными границами при наличии двухфазной зоны. Разработаны новые аналитические методы анализа нелинейных задач стефановского типа. Полученные в работе результаты значимы с прикладной точки зрения для прогнозирования динамики фазовых переходов в климатологии и материаловедении. Рассмотрено два сценария процесса для различных форм дендритных структур, обеспечивающих снятие переохлаждения в системе. Обоснован аналитический метод решения задачи, основанный на использовании уравнения диффузии примеси вместо приближенного уравнения Шейла. Модели проанализированы для случая учета зависимости от времени величин температуры и солености на глубине и без такового. Показано, что температура и соленость в двухфазной зоне являются линейными функциями пространственной координаты, а доля твердой фазы в ней претерпевает лишь незначительные пространственно-временные изменения. Найдены теплофизические характеристики рассматриваемых систем, а именно: распределения температуры, солености, концентрации примеси, доли твердой фазы во всех регионах протекания процесса направленной кристаллизации. Получен явный вид законов движения границ фазового перехода, найдена протяженность двухфазной зоны и характеристики тепловых потоков.

Достоверность результатов обеспечивается обоснованностью физических представлений и моделей теплофизики кристаллизации, используемых для исследований процессов тепло- и массопереноса; математической строгостью методов решения и согласованностью результатов, полученных различными способами; соответствием полученных выводов данным экспериментов, наблюдений и результатам численных расчетов.

Научная и практическая ценность работы выражена в значительном вкладе в

решение фундаментальной проблемы теплофизики кристаллизации, растворов и расплавов при наличии движущейся области фазового превращения. Полученные результаты имеют непосредственное приложение к геофизике (замерзание воды и расчет теплового потока, исходящего в атмосферу) и металлургии (получение материалов определенных свойств). Сравнительная оценка состояния проблемы исследования, проведенная выше, говорит о значимости настоящих исследований, их актуальности и отсутствии прямых аналогов в мировой литературе. Обобщение проделанной работы представлено в настоящем исследовании и опубликовано в реферируемом издании, рекомендованном ВАК «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки» (статья «Нестационарная кристаллизация воды с двухфазной зоны при турбулентных и нетурбулентных условиях», 2010, №1 (20), С.133-142). Проведенные исследования являются новыми и практически значимыми для Российской Федерации, традиционно заинтересованной в изучении проблем замерзания полярных морей и прогнозировании свойств материалов, получаемых путем затвердевания расплавленного вещества.

4. Публикация результатов НИР

4.1. Заключение экспертной комиссии по открытому опубликованию.



Экспертное заключение о возможности опубликования

Я, председатель экспертной комиссии (или руководитель-эксперт) заведующий лабораторией математического моделирования физико-химических процессов в многофазных средах

(наименование подразделения)

Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Уральский государственный университет им. А.М.Горького», рассмотрев статью Низовцевой И.Г., Александрова Д.В. «Нестационарная кристаллизация воды с двухфазной зоной при турбулентных и нетурбулентных граничных условиях», 21
страница

(Ф.И.О. автора, вид, название материала, количество листов)

подтверждаю, что в материале не содержатся сведения, относящиеся к государственной тайне. Материал не патентоспособен и не содержит сведений конфиденциального характера и «ноу-хау».

На публикацию материалов не следует
(следует ли)

получить разрешение Федерального агентства по образованию
(организации, данный пункт вводится при необходимости)

Заключение: это позволяет мне сделать заключение, что рассмотренный материал может быть опубликован в открытой печати и вывезен за границу для опубликования

Председатель комиссии (руководитель-эксперт)

Зав. лабораторией математического моделирования физико-химических процессов в многофазных средах А.Ю. Зубарев
(должность, подпись, инициалы и фамилия)

Главный специалист ОНТИ УНИ Н.П. Невраева
(подпись)

Начальник Первого отдела А.Г. Гришин
(подпись)

4.2 Копия статьи, опубликованной в журнале ВАК.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — № 1 (20). — С. 133–142

УДК 536.421.4

НЕСТАЦИОНАРНАЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ ВОДЫ С ДВУХФАЗНОЙ ЗОНОЙ ПРИ ТУРБУЛЕНТНЫХ И НЕТУРБУЛЕНТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

И. Г. Низовцева, Д. В. Александров

Уральский государственный университет им. А. М. Горького,
620083, Екатеринбург, пр-т Ленина, 51.

E-mails: nizovtseva.irina@gmail.com, dmitri.alexandrov@usu.ru

Развита математическая модель процессов затвердевания от охлаждаемой по произвольному закону границы в присутствии двухфазной зоны для неизотермического раствора (морской воды) в отсутствии и при наличии турбулентности жидкости на границе между двухфазной зоной и жидкой фазой системы. Определены распределения температуры, концентрации примеси и доли твёрдой фазы во всех регионах протекания процесса, найден закон движения границы «твёрдая фаза – двухфазная зона». Рассмотрены два сценария процесса: с нулевой (который описывает затвердевание с кристаллами игольчатой формы) и отличной от нуля (который описывает затвердевание с кристаллами с затупленной формой концов) долями твёрдой фазы на границе «двухфазная зона – жидкость». Результаты развитой теории находят в хорошем соответствии с данными наблюдений.

Ключевые слова: кристаллизация, морские льды, тепломассоперенос, двухфазная зона.

Введение. На первый взгляд кажущаяся тривиальной проблема роста твёрдой фазы от охлаждаемой границы берет свое начало от так называемой задачи Стефана, описывающей широкий круг физических процессов [1]. Их сложное нелинейное поведение и необходимость расчета различных характеристик этих процессов, встречающихся как в геофизике, так и в металлургии, является стимулом для разработки новых математических подходов к решению. Как уже отмечалось, процессы затвердевания бинарных растворов и расплавов часто протекают в условиях присутствия зон переохлаждения, т. е. зон в жидкой фазе системы с температурой ниже температуры фазового перехода, которая может зависеть от солености воды (концентрации растворенной примеси). Будем рассматривать ситуацию, когда концентрационное переохлаждение в двухфазной зоне снимается за счет активно растущих элементов твёрдой фазы [2, 3] и произведем учёт течений турбулизированной жидкости вблизи растущей границы «двухфазная зона – вода». Такой учёт приведёт к изменению пограничных условий баланса тепла и массы на этой границе. Будем основываться на предположении о линейных температурных распределениях в твёрдой фазе и двухфазной зоне (это предположение часто реализуется в естественных условиях при замерзании трещин [4, 5] и образовании ложного дна [6]), следующее из того обстоятельства, что время релаксации температурного поля намного меньше характерного времени движения границы «двухфазная зона – жидкая фаза». Также будем считать,

Ирина Геннадьевна Низовцева, инженер-исследователь, лаб. математического моделирования физико-химических процессов в многофазных средах. Дмитрий Валерьевич Александров (д.ф.-м.н.), профессор, каф. математической физики.

что граница «твёрдая фаза – двухфазная зона» сильно отстаёт от границы «двухфазная зона – жидкая фаза» вследствие того, что растворенная соль вытесняется растущей твёрдой фазой в области, где её концентрация становится очень высокой. Присутствие таких областей в двухфазной зоне сильно тормозит движение границы «твёрдая фаза – двухфазная зона».

1. Нетурбулентная модель кристаллизации в условиях неизотермического океана. Будем рассматривать полуограниченную область $z > 0$, изначально заполненную жидкостью солёности S_∞ и находящейся при температуре T_∞ . Считается, что на границе между водой и атмосферой $z = 0$ в начальный момент образовалась тонкая корочка льда, а сама граница поддерживается при температуре $T_0(t)$, которая является произвольной функцией времени t . Области $a(t) < z < b(t)$ и $z > b(t)$ заполнены двухфазной зоной и жидкой фазой. В соответствии с предположениями о линейности температуры в твёрдой фазе и двухфазной зоне, для распределения температуры имеем (см. также работы [4–6])

$$T_i(z, t) = T_0(t) + C_1(t)z, \quad 0 < z < a(t), \quad (1)$$

$$T_m(z, t) = T_1(t) + T_2(t)z, \quad a(t) < z < b(t), \quad (2)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — границы двухфазной зоны с твёрдой фазой и жидкостью соответственно. Линейный температурный профиль (2) в двухфазной зоне должен приблизительно удовлетворять уравнению теплопроводности (здесь L_V — скрытая теплота кристаллизации):

$$\rho_m(\varphi)c_{pm}(\varphi)\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_m(\varphi)\frac{\partial T_m}{\partial z} \right) + L_V \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad a(t) < z < b(t), \quad (3)$$

где коэффициент теплопроводности и произведение плотности на теплоёмкость k_m и $\rho_m c_{pm}$ могут считаться линейно зависящими от доли твёрдой фазы φ (индексы m , i и w соответственно обозначают характеристики двухфазной зоны, льда и воды):

$$k_m(\varphi) = k_i\varphi + k_w(1 - \varphi), \quad \rho_m(\varphi)c_{pm}(\varphi) = \rho_i c_{pi}\varphi + \rho_w c_{pw}(1 - \varphi). \quad (4)$$

Справедливость соотношений (4) обсуждается в работах [7–9].

Уравнение (3) будет аппроксимироваться линейным профилем (2), если временные и пространственные изменения доли твёрдой фазы φ незначительны (а это выполняется в силу быстрой релаксации температурного профиля). Это свойство согласуется с полученными решениями, а также обсуждается в работах [10–12].

Уравнение диффузии соли в двухфазной зоне и уравнение линии ликвидус имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((1 - \varphi) S_m \right) = D_w \frac{\partial}{\partial z} \left((1 - \varphi) \frac{\partial S_m}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$$T_m(z, t) = -m S_m(z, t), \quad (6)$$

где S_m — концентрация примеси (солёность раствора); D_w — коэффициент диффузии соли; m — наклон линии ликвидус, определяемый из фазовой диаграммы.

Граничные условия, выполняемые на подвижных границах $a(t)$ и $b(t)$ записываются в следующем виде (см, например, [13, 14]):

$$\varphi = \varphi_a, \quad T_i = T_m, \quad z = a(t), \quad (7)$$

$$L_V (1 - \varphi_a) \frac{da}{dt} = k_i \frac{\partial T_i}{\partial z} - k_m(\varphi_a) \frac{\partial T_m}{\partial z}, \quad z = a(t), \quad (8)$$

$$S_m(1 - \varphi_a) \frac{da}{dt} = -D_w(1 - \varphi_a) \frac{\partial S_m}{\partial z}, \quad z = a(t), \quad (9)$$

$$\varphi = \varphi_b, \quad T_m = T_b, \quad z = b(t), \quad (10)$$

$$L_V \varphi_b \frac{db}{dt} = k_m(\varphi_b) \frac{\partial T_m}{\partial z} - k_w \frac{\partial T_w}{\partial z}, \quad z = b(t), \quad (11)$$

$$S_b \varphi_b \frac{db}{dt} = D_w(1 - \varphi_b) \frac{\partial S_m}{\partial z} - D_w \frac{\partial S_w}{\partial z}, \quad z = b(t), \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial z} = -m \frac{\partial S_w}{\partial z}, \quad z = b(t). \quad (13)$$

Напомним, что условия (7) и (10) отражают непрерывность температуры, однако доля твёрдой фазы φ может и не быть непрерывной [13]. Граничные условия (8), (9) и (11), (12) представляют собой условия баланса тепла и массы на движущихся границах. Условие (13) показывает, что концентрационное переохлаждение скомпенсировано в граничной точке двухфазной зоны [13].

В области, занятой жидкостью, выполняются следующие уравнения теплопроводности и диффузии:

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = a_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial S_w}{\partial t} = D_w \frac{\partial^2 S_w}{\partial z^2}, \quad z > b(t), \quad (14)$$

где $a_w = k_w / (\rho_w c_{pw})$.

Модель (1)–(14) полностью описывает динамику процесса затвердевания в нетурбулентных условиях, т.е. в случае, когда течение жидкости в океане не вносит существенных изменений в потоки тепла и массы на границе «двухфазная зона – жидкая фаза», когда справедливы пограничные условия (11) и (12).

Перейдём теперь к вопросу построения аналитических решений сформулированной модели. В случае слабых отклонений закона движения границы $b(t)$ от зависимости, пропорциональной корню из времени [5], решения уравнений (14) могут быть аппроксимированы следующими выражениями:

$$T_w(z, t) = T_\infty + \frac{(T_b - T_\infty) \operatorname{erfc}(z/\sqrt{4a_w t})}{\operatorname{erfc}(b(t)/\sqrt{4a_w t})}, \quad (15)$$

$$S_w(z, t) = S_\infty + \frac{(S_b - S_\infty) \operatorname{erfc}(z/\sqrt{4D_w t})}{\operatorname{erfc}(b(t)/\sqrt{4D_w t})}, \quad (16)$$

где $S_b = -T_b/m$, а T_b на поверхности $b(t)$ находится подстановкой распределений (15) и (16) в условие (13) в зависимости от координаты b и времени t :

$$T_b = \frac{T_\infty f_1 + m S_\infty f_2}{f_1 - f_2}, \quad (17)$$

где

$$f_1 = \sqrt{\frac{D_w}{a_w}} \exp\left(-\frac{b^2(t)}{4a_w t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b(t)}{\sqrt{4D_w t}}\right), \quad f_2 = \exp\left(-\frac{b^2(t)}{4D_w t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b(t)}{\sqrt{4a_w t}}\right).$$

Для интегрирования уравнения диффузии (5) выразим $T_2(t)\partial\varphi/\partial z$ из уравнения (3) (чтобы сделать это, для простоты пренебрегаем левой частью уравнения (3) в силу того обстоятельства, что время релаксации поля температуры на несколько порядков меньше соответствующего времени для поля концентрации растворенной соли). Итак, из (2) и (3) имеем

$$T_2(t) \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{L_V}{k_i - k_w} \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Теперь, подставляя распределение (2) и найденную зависимость в уравнение (5), интегрируем уравнение диффузии и записываем распределение доли твёрдой фазы в двухфазной зоне:

$$\varphi(z, t) = \frac{T_m(z, t) - T_b + (T_b + T_c)\varphi_b}{T_m(z, t) + T_c}, \quad T_c = \frac{D_w L_V}{k_i - k_w}, \quad (18)$$

где $T_b(1 - \varphi_b) - T_c\varphi_b$ слабо зависит от времени t . Подставляя $z = a(t)$ в (18), находим долю твёрдой фазы на границе $a(t)$:

$$\varphi_a = \frac{T_1 + aT_2 - T_b + (T_b + T_c)\varphi_b}{T_1 + aT_2 + T_c}. \quad (19)$$

Подстановка выражений (1), (2) и (6) в условия (7), (9) и (10) позволяет выразить коэффициенты $T_1(t)$, $T_2(t)$ и $C_1(t)$:

$$T_1(t) = T_b(t) - b(t)T_2(t), \quad T_2(t) = -T_b(t) \frac{da}{dt} \left(D_w + \left(a(t) - b(t) \frac{da}{dt} \right) \right)^{-1}, \quad (20)$$

$$C_1(t) = \frac{(a(t) - b(t))T_2(t) + T_b(t) - T_0(t)}{a(t)}. \quad (21)$$

Теперь, комбинируя выражения (8), (11), (12), (20) и (21), получаем три соотношения для нахождения положений границ $a(t)$, $b(t)$ и доли твёрдой фазы φ_b :

$$L_V(1 - \varphi_a)a \frac{da}{dt} = k_i(T_b - T_0) + T_b \frac{da}{dt} \frac{(k_i\varphi_a + k_w(1 - \varphi_a))a - k_i(a - b)}{D_w + (a - b)da/dt}, \quad (22)$$

$$L_V\varphi_b \frac{db}{dt} = -\frac{k_i\varphi_b + k_w(1 - \varphi_b)}{D_w + (a - b)da/dt} T_b \frac{da}{dt} - k_w(T_b - T_\infty)F_1(b, t), \quad (23)$$

$$T_b\varphi_b \frac{db}{dt} = -\frac{D_w(1 - \varphi_b)}{D_w + (a - b)da/dt} T_b \frac{da}{dt} - D_w(T_b + mS_\infty)F_2(b, t), \quad (24)$$

где

$$F_1 = -\frac{2}{\sqrt{4\pi a_w t}} \frac{\exp[-b^2/(4a_w t)]}{\operatorname{erfc}[b/\sqrt{4a_w t}]}, \quad F_2 = -\frac{2}{\sqrt{4\pi D_w t}} \frac{\exp[-b^2/(4D_w t)]}{\operatorname{erfc}[b/\sqrt{4D_w t}]},$$

Выражение (23) можно представить в виде:

$$\varphi_b = -k_w \frac{T_b da/dt + (T_b - T_\infty)F_1(D_w + (a - b)da/dt)}{L_V(D_w + (a - b)da/dt)db/dt + (k_i - k_w)T_b da/dt}. \quad (25)$$

Специально подчеркнём, что граничные условия (23) и (24) становятся идентичными при $\varphi_b = 0$. Эта ситуация соответствует спокойному установившемуся режиму затвердевания (см, например, лабораторные эксперименты [15]). В этой ситуации твёрдая фаза вблизи границы $b(t)$ растёт в виде иголок (для автомодельного процесса затвердевания эта ситуация была разобрана в работе [16]). Другая ситуация ($\varphi_b \neq 0$) может наблюдаться в случае размывания жидкостью игольчатой формы кристаллов (например, в случае турбулентного течения жидкости [17]). Тем не менее, рассмотрим обе ситуации затвердевания при $\varphi_b = 0$ и $\varphi_b \neq 0$ в отсутствии турбулентности.

Рассмотрим сначала случай $\varphi_b = 0$. Из выражений (17), (19), (25) и условия $f_1 F_2 = f_2 F_1$ имеем

$$\varphi_a = \frac{T_b(b - a)da/dt}{(T_b + T_c)D_w + T_c(a - b)da/dt}, \quad (26)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{(T_\infty + mS_\infty)D_w f_1 F_2}{T_\infty f_1 + mS_\infty f_2 + (T_\infty + mS_\infty)(a - b)f_1 F_2}. \quad (27)$$

Далее, учитывая что $a \ll b$ (процесс слабо зависит от положения границы a), из выражений (22) и (26) будем иметь

$$\frac{da}{dt} = \frac{(T_0 - T_b)D_w}{bT_0}. \quad (28)$$

Приравнивая теперь левые части выражений (27) и (28), получаем трансцендентное уравнение для границы $b(t)$:

$$\frac{T_0 - T_b}{b(t)T_0} = -\frac{(T_\infty + mS_\infty)f_1 F_2}{T_\infty f_1 + mS_\infty f_2 - (T_\infty + mS_\infty)b f_1 F_2}. \quad (29)$$

Положение границы $a(t)$ находится интегрированием выражения (28). Здесь $T_0 = T_0(t)$, $T_b = T_b(t, b(t))$, $f_1 = f_1(t, b(t))$, $f_2 = f_2(t, b(t))$, $F_1 = F_1(t, b(t))$, $F_2 = F_2(t, b(t))$, $T_\infty = T_\infty(t)$ и $S_\infty = S_\infty(t)$.

Рассмотрим теперь случай $\varphi_b \neq 0$. Учитывая снова, что $a \ll b$ и пренебрегая a в (22), получаем (28). Далее, выражая φ_b из выражений (23) и (24) и приравнивая результат, получаем громоздкое дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее динамику границы $b(t)$. Опуская ряд математических преобразований, запишем его окончательный вид в форме задачи Коши:

$$\frac{db}{dt} = \frac{D_w k_i [T_\infty f_1 + mS_\infty f_2 - T_0(f_1 - f_2)]}{b(t) [D_w L_V (f_1 - f_2) - k_w (T_\infty f_1 + mS_\infty f_2)]}, \quad (30)$$

где $b(0)$ — известный параметр, а аргументы функций, как и ранее, зависят от t и $b(t)$. Положение границы $a(t)$ находится интегрированием выражения (28).

Граничное значение доли твёрдой фазы φ_a , после подстановки T_1 и T_2 из (20) в (19), может быть записано в виде

$$\varphi_a(t) = \frac{T_b b(1 - \varphi_b) da/dt + (T_b + T_c) \varphi_b D_w - T_c \varphi_b b da/dt}{(T_b + T_c) D_w - T_c b da/dt}, \quad (31)$$

где учтено, что $a(t) \ll b(t)$.

На рис. 1 проводится сравнение развиваемой теории с данными лабораторных экспериментов при $\varphi_b = 0$. Для сравнения выбран именно этот случай, поскольку в экспериментах наблюдалась игольчатая форма роста твёрдой фазы.

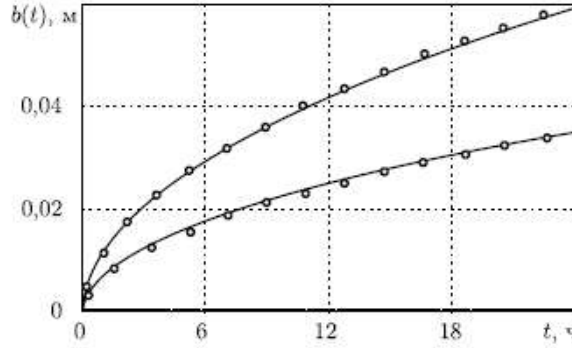


Рис. 1. Зависимость $b(t)$: сплошные линии — расчёт по (30), значки — экспериментальные данные [13, 15], штриховая линия — расчётное положение границы $a(t) \ll b(t)$

Следующий раздел посвящен развитию теории, более приближенной к естественным условиям, где основное внимание уделяется наличию турбулентного переноса тепла и массы.

2. Турбулентная модель кристаллизации в условиях неизотермического океана. В этой ситуации процесс кристаллизации существенно зависит от турбулентного течения жидкости в океане (см., например, [18–20]). С математической точки зрения эта ситуация соответствует новым пограничным условиям на границе «двухфазная зона – океан». Заменяя тепловой и диффузионный потоки в условиях (11) и (12) турбулентными потоками в соответствии с работой [20], получим

$$LV \phi_b \frac{db}{dt} = k_m(\phi_b) \frac{\partial T_m}{\partial z} - \alpha_h \rho_w c_{pw} u (T_\infty - T_b), \quad z = b(t), \quad (32)$$

$$S_b \varphi_b \frac{db}{dt} = D_w (1 - \varphi_b) \frac{\partial S_m}{\partial z} - \alpha_s u (S_\infty - S_b), \quad z = b(t), \quad (33)$$

где α_h и α_s — коэффициенты турбулентного переноса тепла и массы, u — скорость течения.

Отношение коэффициентов α_h/α_s зависит от коэффициентов теплопроводности (a_w) и диффузии (D_w) в воде. По данным работы [19] имеем $\alpha_h/\alpha_s = (a_w/D_w)^n$, где $2/3 < n < 4/5$ [21, 22]. Остальные уравнения и граничные условия модели (выражения (1)–(10)) остаются без изменений, кроме условия (13). В случае турбулентного течения жидкости это условие, вообще говоря,

становится неприменимым, т. к. отсутствует физическая причина пропорциональности между градиентами тепла и массы.

Таким образом, в рассматриваемом случае имеем следующую модель: (1)–(10), (32) и (33).

Выше уже упоминалась принципиальная возможность реализации двух ситуаций кристаллизации с $\varphi_b = 0$ и $\varphi_b \neq 0$. Хотя второй случай в данных условиях представляется более реалистичным и часто встречающимся в геофизике, проанализируем обе ситуации.

Рассматривая ситуацию $\varphi_b = 0$ и считая, что $a(t) \ll b(t)$, после подстановки da/dt из (28) в (32), находим положение границы «двухфазная зона – океан»:

$$b(t) = \frac{k_w(T_0(t) - T_b(t))}{\alpha_h \rho_w c_{pw} u(t)(T_b(t) - T_\infty(t))}, \quad (34)$$

где $T_b(t)$ определяется подстановкой $\partial T_m / \partial z = -m(\partial S_m / \partial z)$ из (32) в (33). В результате получим

$$T_b(t) = -mS_b(t) = -\frac{mS_\infty(t) + PT_\infty(t)}{1 - P}, \quad P = \frac{\alpha_h D_w}{\alpha_s a_w}. \quad (35)$$

Положение границы «двухфазная зона – твёрдая фаза» находится интегрированием выражения (28):

$$a(t) = a(0) + \int_0^t \frac{(T_0(t) - T_b(t))D_w}{b(t)T_0(t)} dt. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь вторую ситуацию $\varphi_b \neq 0$, описывающую размывание жидкостью игольчатой формы растущих кристаллов. Учитывая соотношение (28), справедливое как для турбулентных, так и для нетурбулентных условий, и учитывая, что $a(t) \ll b(t)$, из граничных условий (32) и (33) получим два выражения для доли твёрдой фазы $\varphi_b(t)$:

$$\varphi_b = -\frac{k_w(T_b - T_0) - \alpha_h \rho_w c_{pw} u(T_\infty - T_b)b}{(k_i - k_w)(T_b - T_0) - L_V b db/dt}, \quad (37)$$

$$\varphi_b = \frac{\alpha_s u(mS_\infty + T_b)b + D_w(T_b - T_0)}{D_w(T_b - T_0) + bT_b db/dt}. \quad (38)$$

Приравняв теперь правые части (37) и (38), приходим к задаче Коши для определения $b(t)$:

$$\frac{db}{dt} = \frac{(T_b - T_0)[bf_3 + k_i D_w(T_b - T_0)]}{b[bf_4 + (T_b - T_0)(D_w L_V - T_b k_w)]}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} f_3(t) &= u(t)[\alpha_s(mS_\infty(t) + T_b(t))(k_i - k_w) - \alpha_h \rho_w c_{pw}(T_\infty(t) - T_b(t))D_w], \\ f_4(t) &= u(t)[\alpha_s L_V(mS_\infty(t) + T_b(t)) + T_b(t)\alpha_h \rho_w c_{pw}(T_\infty(t) - T_b(t))], \end{aligned}$$

а $b(0)$ – заданная величина. Положение второй границы $a(t)$, доли твёрдой фазы φ_a и φ_b определяются выражениями (28), (31) и (37), а T_b представляет

собой заданную температуру, в отличие от нетурбулентного сценария кристаллизации, где она определялась выражением (13). Таким образом, в турбулентном случае граничных условий получается на одно меньше, чем в нетурбулентном случае. С физической точки зрения температура T_b должна полностью определяться турбулентным течением жидкости вблизи границы $b(t)$, которое, в свою очередь, зависит от многих факторов (например, от географических координат места расположения трещины и погодных условий).

Полагая скорость трения u в выражении (39) нулевой и интегрируя результат, получим приближенное выражение для $b(t)$ для случая очень медленного течения воды:

$$b(t) = \sqrt{2k_i D_w \int_0^t \frac{T_b - T_0}{D_w L_V - T_b k_w} dt} + b^2(0).$$

Структура полученного интеграла похожа на свой аналог для случая изотермического океана [10, 11].

Для сравнения развиваемой теории с экспериментом, снова обратимся к кристаллизации молодого льда. Рассмотрим образование такого льда по данным полевых наблюдений группы LeadEx [4] (см. также [5]). На рис. 2 и 3 демонстрируется распределение температуры в области кристаллизации на

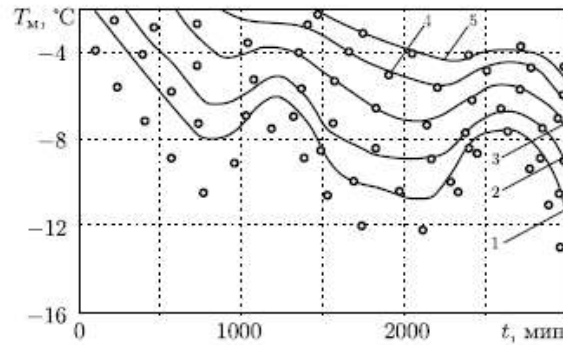


Рис. 2. Температурные профили на различных глубинах z в зависимости от времени: значки — эксперимент [4, 5], линии — расчёт; маркеры: 1 — $z = 0$, 2 — $z = 2$ см, 3 — $z = 4$ см, 4 — $z = 6$ см, 5 — $z = 8$ см

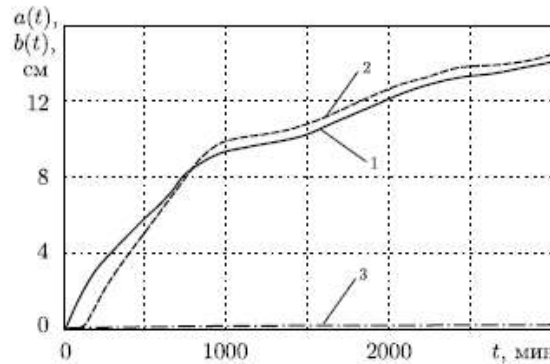


Рис. 3. Временные зависимости положений границ $a(t)$ и $b(t)$ для экспериментов [4, 5]: 1 — $b(t)$ (буй 5), 2 — $b(t)$ (буй 6), 3 — $a(t)$ (буй 5)

различных глубинах z (z — глубина, отмеренная от границы «атмосфера — лёд») и координаты межфазных границ в зависимости от времени в соответствии с развиваемой в настоящем разделе теорией и данными наблюдений [4, 5]. При расчётах использовались следующие значения параметров [20]: $T_b = -1,97$ °C, $m = 0,052$ °C/‰, $L_V = 3,072 \cdot 10^8$ (Вт · с)/м³, $k_i = 2,03$ Вт/(м · °C), $k_w = 0,56$ Вт/(м · °C), $\rho_w = 1000$ кг/м³, $D_w = 1,2 \cdot 10^{-9}$ м²/с, $c_{pw} = 4187$ (Вт · с)/(кг · °C), $T_\infty = -1,7$ °C, $S_\infty = 34,5$ ‰, $\alpha_{su} = 0,18 \cdot 10^{-5}$ м/с, $\alpha_h/\alpha_s = 18,75$. Кривая 1 ($z = 0$) на рис. 2 представляет собой атмосферную температуру на поверхности льда. На рис. 3 показаны колеблющиеся со временем законы движения границ вследствие течения жидкости в океане. Отметим, что граница $a(t)$ сильно отстает от границы $b(t)$, как это и предполагалось при построении теории. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Заключение. В настоящей работе определены аналитические решения затвердевания бинарного раствора с двухфазной зоной в условиях турбулентного движения жидкости в океане. В ситуации, когда $\varphi_b = 0$, определен явный вид законов движения границ двухфазной зоны. В ситуации, когда $\varphi_b \neq 0$, указанные законы найдены в явном виде при постоянных внешних параметрах системы. В случае, когда эти параметры изменяются со временем, в явном виде определен закон движения границы $a(t)$, а для нахождения границы $b(t)$ выписана задача Коши.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00298), а также в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (гос. контракт № П 819).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. — Рига: Звайгзне, 1967. — 457 с.
2. Борисов В. Т. Теория двухфазной зоны металлического слитка. — М.: Металлургия, 1987. — 224 с.
3. Hills R. N., Loper D. E., Roberts P. H. The thermodynamically consistent model of a mushy zone // *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1983. — Vol. 36. — P. 505–539.
4. The LeadEx Group The LeadEx experiment // *Eos Trans. AGU*, 1993. — Vol. 74, No. 35. — P. 393–397.
5. Wettlaufer J. S., Worster M. G., Huppert H. E. Solidification of leads: Theory, experiment, and field observations // *J. Geophys. Res.*, 2000. — Vol. 105, No. C1. — P. 1123–1134.
6. Martin S., Kauffman P. The evolution of under-ice melt ponds, or double diffusion at the freezing point // *J. Fluid Mech.*, 1974. — Vol. 64, No. 3. — P. 507–528.
7. Batchelor G. K. Transport Properties of Two-Phase Materials with Random Structure // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1974. — Vol. 6. — P. 227–255.
8. Buyevich Yu. A., Alexandrov D. V. Heat Transfer in Dispersions. — New York: Begell House, Inc., 2005. — 341 p.
9. Perovich D. K., Gow A. J. A quantitative description of sea ice inclusions // *J. Geophys. Res.*, 1996. — Vol. 101, No. C8. — P. 18,327–18,343.
10. Alexandrov D. V., Malygin A. P., Alexandrova I. V. Solidification of leads: approximate solutions of non-linear problem // *Annals of Glaciology*, 2006. — Vol. 44, No. 1. — P. 118–122.
11. Александров Д. В., Малыгин А. П. Аналитическое описание кристаллизации морской воды в трещинах льдов и их влияние на теплообмен между океаном и атмосферой // *ДАН*, 2006. — Т. 411, № 3. — С. 390–394; англ. пер.: Alexandrov D. V., Malygin A. P. Analytical description of seawater crystallization in ice fissures and their influence on heat exchange between the ocean and the atmosphere // *Doklady Earth Sciences*, 2006. — Vol. 411, No. 2. — P. 1407–1411.
12. Alexandrov D. V., Aseev D. L., Nizovtseva I. G., Huang H.-N., Lee D. Nonlinear dynamics of directional solidification with a mushy layer. Analytic solutions of the problem // *Int. J.*

- Heat Mass Transfer*, 2007. — Vol. 50, No. 17–18. — P. 3616–3623.
13. Worster M. G. Solidification of an alloy from a cooled boundary // *J. Fluid Mech.*, 1986. — Vol. 167. — P. 481–501.
 14. Buyevich Yu. A., Alexandrov D. V., Mansurov V. V. Macrokinetics of crystallization. — New York: Begell House, Inc., 2001. — 183 p.
 15. Huppert H. E., Worster M. G. Dynamic solidification of a binary melt // *Nature*, 1985. — Vol. 314. — P. 703–707.
 16. Alexandrov D. V., Malygin A. P. Self-similar solidification of an alloy from a cooled boundary // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2006. — Vol. 49, No. 3–4. — P. 763–769.
 17. McPhee M. G. A Time-Dependent Model for Turbulent Transfer in a Stratified Oceanic Boundary Layer // *J. Geophys. Res.*, 1987. — Vol. 92, No. C7. — P. 6977–6986.
 18. McPhee M. G. The upper Ocean / In: *The Geophysics of Sea Ice* / NATO ASI series. Series B, Physics; ed. N. Untersteiner. — New York: Plenum Press, 1986. — Vol. 146. — P. 133–141.
 19. McPhee M. G., Maykut G. A., Morison J. H. Dynamics and Thermodynamics of the Ice/Upper Ocean System in the Marginal Ice Zone of the Greenland Sea // *J. Geophys. Res.*, 1987. — Vol. 92, No. C7. — P. 7017–7031.
 20. Notz D., McPhee M. G., Worster M. G., Maykut G. A., Schlünzen K. H., Eicken H. Impact of underwater-ice evolution on Arctic summer sea ice // *J. Geophys. Res.*, 2003. — Vol. 108, No. C7. — P. 3223.
 21. Owen P. R., Thomson W. R. Heat transfer across rough surfaces // *J. Fluid Mech.*, 1963. — Vol. 15, No. 3. — P. 321–334.
 22. Yaglom A. M., Kader B. A. Heat and mass transfer between a rough wall and turbulent fluid flow at high Reynolds and Péclet numbers // *J. Fluid Mech.*, 1974. — Vol. 62, No. 3. — P. 601–623.

Поступила в редакцию 16/II/2010;
в окончательном варианте — 04/III/2010.

MSC: 80A22, 80A20, 76F40, 86A40

NON-STATIONARY CRYSTALLIZATION OF WATER WITH A MUSHY LAYER IN THE TURBULENT AND NON-TURBULENT BOUNDARY CONDITIONS

I. G. Nizovceva, D. V. Alexandrov

Ural State University,
51, pr. Lenina, Ekaterinburg, 620083.

E-mails: nizovtseva.irina@gmail.com, dmitri.alexandrov@usu.ru

In the present work, we developed a mathematical model of the solidification processes from a cooling by an arbitrary law boundaries in the presence of mushy layer for non-isothermal solution (sea water) in the absence and presence of turbulence in the liquid at the boundary between the mushy layer and liquid phase of the system. The distribution of temperature, impurity concentration and the solid phase fraction in all regions of the process, and also the law of motion of the solid phase — mushy layer boundary were found. We consider two scenarios of the process: with no solid phase (which describes the solidification with some needle-shaped crystals) and with some (which describes the solidification of a blunt-end crystals) portion of the solid phase at the boundary of mushy layer and liquid. The results of the developed theory are in good agreement with observations.

Key words: crystallization, sea ice, heat and mass transfer, mushy layer.

Original article submitted 16/II/2010;
revision submitted 04/III/2010.

Irina G. Nizovceva, Engineer Researcher, Lab. of Mathematical Modeling of Physical and Chemical Processes in Multiphase Media. Dmitry V. Alexandrov (Dr. Sci (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Mathematical Physic.

Заключение.

Научные материалы, изложенные в отчете представляют собой единую теорию исследования нелинейных динамики структурных и фазовых превращений в гидромеханических и тепломассообменных процессах кристаллизации вещества. Работа посвящена исследованию процессов замерзания воды в трещинах океанических льдов, описывающей динамику образования структуры типа «ложное дно» для изотермического и неизотермического океана. Сформулирована нелинейная математическая модель процесса тепло- и массопереноса, учитывающая наличие трех движущихся границ фазового перехода. Аналитически получены точные решения нелинейной модели с учетом временных зависимостей температуры и солености воды на глубине и флуктуаций скорости трения; найдены распределения температуры и солености воды, доля твердой фазы, законы движения границ фазового перехода «морская вода - двухфазная зона», «двухфазная зона - талая вода» и «талая вода - лед». Показано, что структурные переходы в толще льда связаны с процессами эволюции ложного дна. Рассмотрена фронтальная модель; модель двухфазной зоны, существенно отличающаяся от фронтальной модели и известных ранее подходов, которая адекватно описывает физическую картину процесса и хорошо согласуется с наблюдениями. В рамках развиваемой модели, впервые получено аналитическое решение нелинейной нестационарной проблемы «ложного дна» с учетом временных зависимостей температуры и солености воды на глубине и флуктуаций скорости трения. Определен явный вид законов движения границ фазового перехода и протяженность зоны.

Результаты выполнения НИР использованы и будут использованы:

1. Для получения новых выводов и дальнейшего развития знаний о динамике фазовых переходов при замерзании льда.

2. Для обновления лекционных курсов, читаемых студентам, таких как «Аналитические методы механики сплошных сред», «Тепломассоперенос», «Физика», написания пособий и учебно-научных монографий.
3. Для повышения квалификации молодых кадров в области геофизики, защиты кандидатских диссертаций членами группы, выполнения квалификационных работ членами группы - студентами.

Список использованных источников

1. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана, Рига: Звайгзне, 1967.
2. Борисов В.Т. Теория двухфазной зоны металлического слитка, М.: Металлургия, 1987.
3. Hills R.N., Loper D.E., Roberts P.H. A thermodynamically consistent model of a mushy zone - Q. J. Mech. Appl. Math., 1983, **36**, P. 505-539.
4. Morison J., McPhee M., Muench R. et al. The LeadEx experiment - EOS. Trans. AGU, 1993, **74**, P. 393 - 397.
5. Wettlaufer J.S., Worster M.G., Huppert H.E. Solidification of leads: theory, experiment and field observations - J. Geophys. Res., 2000, **105**, P. 1123 - 1134.
6. Martin S., Kauffman P. The evolution of under-ice melt ponds, or double diffusion at the freezing point - J. Fluid Mech., 1974, **64**, P. 507 - 527.
7. Notz D. et al., Impact of underwater-ice evolution on Arctic summer sea ice // J. Geophys. Res., 2003.- Vol. **108**(C7).- P. 3223.
8. McPhee M. G., The upper ocean. In The geophysics of sea ice (ed. by N. Untersteiner).- New York: Plenum, 1986.- P. 133-141.
9. McPhee M. G., Maykut G. A., Morison J. H., Dynamics and thermodynamics of the ice/upper ocean system in the marginal ice zone of the Greenland sea // J. Geophys. Res., 1987.- Vol. **92**(C7).- P. 7017-7031.
10. McPhee M. G., Small scale processes. In Polar oceanography, Part A: Physical science.- San Diego, Calif.: Academic, 1990.- P. 287-334.
11. Hills R. N., Loper D. E., Roberts P. H., A thermodynamically consistent model of a mushy zone // Q. J. Appl. Math., 1983.- Vol. **36**.- P. 505-539.
12. Buyevich Yu. A., Alexandrov D. V., Mansurov V. V., Macrokinetics of crystallization.- New York: Begell House, 2001.
13. Александров Д. В., Малыгин А. П., Аналитическое описание кристаллизации морской воды в трещинах льдов и их влияние на теплообмен

между океаном и атмосферой // Доклады АН, 2006.- Т. **411**(3).- С. 390-394.

14. Alexandrov D. V., Malygin A. P., Alexandrova I. V., Solidification of leads: approximate solutions of non-linear problem // Ann. Glaciol., 2006.- Vol. **44**.- P. 118-122.

15. Scheil E., Bemerkungen zur schichtkristallbildung // Zeitschrift für Metallkunde, 1942.- Vol. **34**.- P. 70-72.

16. Owen P. R., Thomson W. R., Heat transfer across rough surfaces // J. Fluid Mech., 1963.- Vol. **15**.- P. 321-334.

17. Yaglom A. M., Kader B. A., Heat and mass transfer between a rough wall and turbulent flow at high Reynolds and Peclet numbers // J. Fluid Mech., 1974.- Vol. **62**.- P. 601-623.

18. Batchelor G.K. Transport properties of two-phase materials with random structure - Ann. Rev. Fluid Mech, 1974, **6**, P. 227-255.

19. Buyevich Yu.A., Alexandrov D.V. Heat Transfer in Dispersions, New York: Begell House, Inc., 2005.

20. Perovich D.K., Gow A.J. A quantitative description of sea ice inclusions - J. Geophys. Res., 1996, **101**, P. 18,327 - 18,343.

21. Alexandrov D.V., Aseev D.L., Nizovtseva I.G., Huang H.-N., Lee D. Nonlinear dynamics of directional solidification with a mushy layer. Analytic solutions of the problem - International Journal of Heat and Mass Transfer, 2007, **50**, P. 3616-3623.

22. Worster M.G. Solidification of an alloy from a cooled boundary - J. Fluid Mech., 1986, **167**, P. 481-501.

23. Huppert H.E., Worster M.G., Dynamic solidification of a binary alloy - Nature, 1985, **314**, P. 703 - 707.

24. Alexandrov D.V., Malygin A.P. Self-similar solidification of an alloy from a cooled boundary - International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006, **49**, P. 763-769.

25. McPhee M.G. A time-dependent model for turbulent transfer in a stratified oceanic boundary layer under pack ice - J. Geophys. Res., 1987, **92**, P. 6987 - 6989